Topologia
Lista 3

Zad 1. Sprawdzić, czy rodzina $\mathcal{B} = \{[a,b),(a,b] : \ a,b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$ jest bazą pewnej topologii na $\mathbb{R}$.

Zad 2. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologi na $\mathbb{R}$ składająca sie z przedziałów (a,b), $a < b$. Pokazać, że $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ jest bazą topologii na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$.

Zad 3. Pokazać, że rodziny $\mathcal{B}_{[\,)} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{(\,]} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}\}$ są bazami pewnych topologii na $\mathbb{R}$, które oznaczać będziemy odpowiednio przez $\tau_{[\,)}$ i $\tau_{(\,]}$.

a) Czy topologie $\tau_{[\,)}$, $\tau_{(\,]}$ są uboższe, czy bogatsze od topologi euklidesowej?

b) Czy ciągi $x_n = 1 + \frac{1}{n}$, $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ są zbieżne w topologii $\tau_{[\,)}$, lub $\tau_{(\,]}$?

c) Pokazać, że $\tau_{[\,)} \cap \tau_{(\,]}$ jest topologią na $\mathbb{R}$. Co to za topologia?

d) Opisać topologię generowaną przez $\tau_{[\,)} \cup \tau_{(\,]}$.

Zad 4. Czy istnieje baza przeliczalna wprowadzająca na $\mathbb{R}$ topologie euklidesową?

Zad 5. Niech $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Pokazać, że rodzina

$$\mathcal{B} = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, ...\} \cup \{U \subset X : \ X \setminus U \text{ zbiór skończony i } x_0 \in U\}$$

jest bazą pewnej topologi na X. Opisać operację wnętrza i operacje domknięcia w tej topologii.

Zad 6. Wykazać, że każde odwzorowanie przestrzeni dyskretnej w dowolną przestrzeń topologiczną jest ciągłe.

Zad 7. Niech X będzie przestrzenią topologiczną rozważaną w Zadaniu 5. Czy odwzorowanie $f : X \to X$ dane wzorem $f(x_n) = x_{n+1}$ jest ciągłe?

Zad 8. Kiedy przekształcenie identycznościowe $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ jest ciągłe?

Zad 9. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Pokazać, że topologia podprzestrzeni jest najuboższą topologią na A, przy której włożenie $i : \mathcal{A} \to X$ jest funkcją ciągłą.

Zad 10. Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Pokazać, że jeżeli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to f jest homeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{A \subset X} \ \ f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$